ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

(Вывод и первое обсуждение формулы замены переменных)

1. Постановка вопроса и эвристический вывод формулы замены переменных.

Рассматривая интеграл в одномерном случае, мы получили в свое время важную формулу замены переменной в таком интеграле. Теперь наша задача состоит в том, чтобы найти формулу замены переменных в общем случае. Уточним вопрос.

Пусть D_x — множество в $\mathbb{R}^n$, f — интегрируемая на D_x функция, а $\varphi\colon D_t \to D_x$ — отображение $t \mapsto \varphi(t)$ множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на D_x. Спрашивается, по какому закону, зная f и φ, находить функцию ψ в D_t так, чтобы иметь равенство

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \int\limits_{D_t} \psi(t)\,dt,$$

позволяющее сводить вычисление интеграла по D_x к вычислению интеграла по D_t?

Предположим сначала, что D_t есть промежуток $I \subset \mathbb{R}^n$, а $\varphi\colon I \to D_x$ — диффеоморфное отображение этого промежутка на D_x. Любому разбиению P промежутка I на промежутки $I_1, I_2, \dots, I_k$ соответствует разложение D_x на множества $\varphi(I_i)$, $i = 1, \dots, k$. Если все эти множества измеримы и пересекаются попарно лишь по множествам меры нуль, то в силу аддитивности интеграла

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\varphi(I_i)} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если f непрерывна на D_x, то по теореме о среднем

$$\int\limits_{\varphi(I_i)} f(x)\,dx = f(\xi_i)\;\mu(\varphi(I_i)),$$

где $\xi_i \in \varphi(I_i)$. Поскольку $f(\xi_i) = f(\varphi(\tau_i))$, где $\tau_i = \varphi^{-1}(\xi_i)$, то нам остается связать $\mu(\varphi(I_i))$ с $\mu(I_i) = |I_i|$.

Если бы φ было линейным преобразованием, то $\varphi(I_i)$ был бы параллелепипед, объем которого, как известно из аналитической геометрии и алгебры, был бы равен $|\det\varphi'|\ \mu(I_i)$. Но диффеоморфизм локально является почти линейным отображением, поэтому, если размеры промежутков I_i достаточно малы, то с малой относительной погрешностью можно считать, что $\mu(\varphi(I_i)) \approx |\det\varphi'(\tau_i)|\ \mu(I_i)$ (можно показать, что при некотором выборе точки $\tau_i \in I_i$ будет иметь место даже точное равенство). Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\varphi(I_i)} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{k} f(\varphi(\tau_i))|\det\varphi'(\tau_i)|\ |I_i|. \tag{2}$$

Но справа в этом приближенном равенстве стоит интегральная сумма от функции $f(\varphi(t))|\det\varphi'(t)|$ по промежутку I, отвечающая разбиению P этого промежутка с отмеченными точками τ. В пределе при $\lambda(P) \to 0$ из (1) и (2) получаем

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \int\limits_{D_t} f(\varphi(t))|\det\varphi'(t)|\,dt. \tag{3}$$

Это и есть искомая формула вместе с ее объяснением. Намеченный путь к ней можно пройти со всеми обоснованиями. Собственно, нам надо только показать законность последнего предельного перехода, предполагавшего, что стоящий в (3) справа интеграл существует, а также уточнить использованную связь $\mu(\varphi(I_i)) \approx |\det\varphi'(\tau_i)|\ |I_i|$.

Проделаем это.

2. Некоторые свойства гладких отображений и диффеоморфизмов.

a) Напомним, что любое гладкое отображение φ замкнутого ограниченного промежутка $I \subset \mathbb{R}^n$ (как и любого выпуклого компакта) является липшицевым. Это следует из теоремы о конечном приращении и ограниченности φ' (в силу непрерывности) на компакте:

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \le \sup_{\tau\in[t_1,t_2]} ||\varphi'(\tau)||\ |t_2 - t_1| \le L\ |t_2 - t_1|. \tag{4}$$

b) Это, в частности, означает, что при отображении φ расстояние между точками не может увеличиться более, чем в L раз.

Например, если какое-то множество $E \subset I$ имело диаметр d, то диаметр его образа $\varphi(E)$ не больше, чем Ld, и множество $\varphi(E)$ можно покрыть (n-мерным) кубиком с ребром величины Ld и объемом $(Ld)^n$.

Так, если E — n-мерный кубик с ребром δ, и объемом δ^n, то его образ покрывается стандартным координатным кубиком объема $(L\sqrt{n}\delta)^n$.

c) Из этого следет, что при гладком отображении образ множества меры нуль также является множеством меры нуль (в смысле n-мерной меры). [Ведь в определении множества меры нуль, как легко заметить, можно ограничиться покрытиями из кубиков вместо покрытий общими n-мерными промежутками — "прямоугольными параллелепипедами".]

Если гладкое отображение $\varphi\colon D_t \to D_x$ к тому же имеет и гладкое обратное отображение $\varphi^{-1}\colon D_x \to D_t$, т.е. если φ — диффеоморфизм, то, очевидно, и прообраз множества меры нуль тоже имеет меру нуль.

d) Поскольку при диффеоморфизме якобиан $\det\varphi'$ отображения всюду отличен от нуля, а само отображение взаимно однозначно, то (в силу теоремы об обратной функции) внутренние точки любого множества при таком отображении переходят во внутренние точки образа этого множества, а граничные точки — в граничные точки образа.

Вспоминая определение допустимого (измеримого по Жордану) множества как ограниченного множества, граница которого имеет меру нуль, можем заключить, что при диффеоморфизме образ измеримого множества также является измеримым множеством.

(Это верно и для любых гладких отображений.) Но для диффеоморфизмов еще и прообраз измеримого множества, очевидно, является измеримым множеством.

e) Последнее, в частности, означает, что если $\varphi\colon D_t \to D_x$ — диффеоморфизм, то из существования интеграла, стоящего в левой части доказываемой формулы (3), (на основании критерия Лебега) вытекает и существование интеграла, стоящего справа.

3. Связь мер образа и прообраза при диффеоморфизме. Покажем теперь, что если $\varphi\colon I \to \varphi(I)$ — диффеоморфизм, то

$$\mu(\varphi(I)) = \int\limits_I \det\varphi'(t)\,dt\ , \tag{5}$$

в предположении положительности подинтегральной функции $\det\varphi'$.

Отсюда по теореме о среднем, в частности, получится, что найдется такая точка $\tau \in I$, что

$$\mu(\varphi(I)) = \det\varphi'(\tau)\ |I|, \tag{6}$$

Формула (5) фактически есть частный случай формулы (3), когда $f \equiv 1$.

Для линейных отображений она известна, хотя, возможно, без обсуждения деталей, связанных с тем, что она справедлива по отношению к линейным отображениям не только простейших параллелепипедов, но и любых измеримых множеств. Поясним это. Известно, что линейное отображение раскладывается в композицию простейших, которые, с точностью до возможной перестановки пар координат, сводятся к изменению только одной из них: умножению на число или добавлению к одной из координат другой. Теорема Фубини позволяет сказать, что в первом случае объем любого измеримого множества умножится на тот же множитель, что и умножаемая координата (точнее, на его модуль, если рассматриваются неотрицательные — неориентированные объемы). Во втором случае фигура хотя и меняется, но ее объем остается прежним, поскольку соответствующие одномерные сечения лишь сдвигаются, сохраняя линейную меру. Наконец, перестановка пары координат меняет ориентацию пространственного репера (определитель такого линейного преобразования равен -1), но не меняет значения неориентированного объема фигур. (На языке теоремы Фубини это просто смена порядка двух интегрирований.)

Остается вспомнить, что детерминант композиции линейных отображений является произведением детерминантов сомножителей.

Итак, считая, что для линейных и аффинных отображений формула (5) уже установлена, докажем ее для произвольного диффеоморфизма с положительным якобианом.

a) Воспользуемся еще раз теоремой о конечном приращении, но теперь чтобы оценить возможное отклонение отображения $\varphi\colon I \to \varphi(I)$ от аффинного отображения $t \mapsto A(t) = \varphi(a) + \varphi'(a)(t-a)$, где t — переманная, а a — фиксированная точка промежитка I. Отображение $A\colon I \to A(I)$ есть просто линейная часть тейлоровского разложения отображения φ в точке $a \in I$.

Применяя теорему о конечном приращении к функции $t \mapsto \varphi(t) - \varphi'(a)(t-a)$, находим

$$|\varphi(t) - \varphi(a) - \varphi'(a)(t-a)| \le \sup_{\tau\in[a,t]} ||\varphi'(\tau) - \varphi'(a)||\ |t-a|. \qquad (7)$$

Учитывая равномерную непрерывность непрерывной функции φ' на компакте I, из (7) заключаем, что существует неотрицательная функция $\delta \mapsto \varepsilon(\delta)$, стремящаяся к нулю при $\delta \to +0$, такая, что для любых точек $t, a \in I \subset \mathbb{R}^n$

$$|t-a| \leq \sqrt{n}\delta \implies |\varphi(t)-A(t)| = |\varphi(t)-\varphi(a)-\varphi'(a)(t-a)| \leq \varepsilon(\delta)\,\delta. \tag{8}$$

b) Теперь перейдем непосредственно к доказательству формулы (5).

Позволим себе сначала маленькое техническое облегчение: будем считать, что длины ребер параллелепипеда I соизмеримы и, следовательно, его можно разбить на одинаковые кубики $\{I_i\}$ сколь угодно малого размера ребер $\delta_i = \delta$ и объема ${\delta_i}^n = \delta^n$, т.е. $I = \cup_i I_i$ и $|I| = \sum_i |I_i| = \sum_i {\delta_i}^n$.

В каждом кубике I_i фиксируем некоторую точку a_i, построим соответствующее аффинное отображение $A_i(t) = \varphi(a_i) - \varphi'(a_i)(t-a_i)$, рассмотрим образ $A_i(\partial I_i)$ границы ∂I_i кубика I_i при отображении A_i и возьмем $\varepsilon(\delta)\delta$-окрестность этого образа, которую обозначим через Δ_i.

В силу (8) образ $\varphi(\partial I_i)$ границы ∂I_i кубика I_i при диффеоморфизме φ лежит в Δ_i. Значит, имеют место следующие включения

$$A_i(I_i) \setminus \Delta_i \subset \varphi(I_i) \subset A_i(I_i) \cup \Delta_i$$

и неравенства

$$|A_i(I_i)| - |\Delta_i| \leq |\varphi(I_i)| \leq |A_i(I_i)| + |\Delta_i|.$$

Суммируя их, находим, что

$$\sum_i |A_i(I_i)| - \sum_i |\Delta_i| \leq |\varphi(I)| = \sum_i |\varphi(I_i)| \leq \sum_i |A_i(I_i)| + \sum_i |\Delta_i|. \tag{9}$$

Но при $\delta \to +0$

$$\sum_i |A_i(I_i)| = \sum_i \det \varphi'(a_i)|I_i| \to \int\limits_I \det \varphi'(t)\, dt\ ,$$

поэтому для доказательства формулы (5) в нашем случае осталось проверить, что $\sum_i |\Delta_i| \to 0$ при $\delta \to +0$.

c) Оценим сверху объем $|\Delta_i|$, опираясь на оценки (4) и (8). Согласно (4) ребра параллелепипеда $A_i(I_i)$ имеют длину не большую, чем $L\delta$, где $\delta = \delta_i$ длина ребра кубика I_i. Поэтому $(n-1)$-мерная "площадь"каждой из $2n$ граней параллелепипеда $A_i(I_i)$ не больше, чем $(L\delta)^{n-1}$. Мы берем $\varepsilon(\delta)\delta$-окрестность такой грани. Ее объем оценивается величиной $(2+2)\ \varepsilon(\delta)\delta\ (L\delta)^{n-1}$, где вторая двойка написана для поглощения вклада скругленных частей этой окрестности, возникающих около края самой грани. Таким образом, $|\Delta_i| <$

$2n\ 4\ L^{n-1}\ \varepsilon(\delta)\ \delta^n$, поэтому

$$\sum_i |\Delta_i| < 8nL^{n-1} \sum_i \varepsilon(\delta)\ \delta_i^n = 8nL^{n-1}\ \varepsilon(\delta)\ |I|\ ,$$

и мы видим, что $\sum_i |\Delta_i| \to 0$ при $\delta \to +0$.

d) Проведенная оценка величины $|\Delta_i|$ заодно показывает, что сколь угодно малое уменьшение ребер исходного промежитка I, которое, возможно, следовало бы сделать, чтобы получить их соизмеримость, в пределе не влияет на результат.

4. Некоторые примеры, замечания и обобщения.

Итак формула (3) для случая $D_t = I$ и непрерывной функции f доказана. Рассмотрим и обсудим некоторые примеры. Эти обсуждения заодно покажут, что на самом деле мы уже доказали формулу (3) не только для $D_t = I$ и не только для непрерывной функции f.

a) *Пренебрежимые множества.* Используемые на практике замены переменных или формулы преобразования координат иногда имеют те или иные особенности (например, где-то может быть нарушение взаимной однозначности, обращение в нуль якобиана или отсутствие дифференцируемости). Как правило, эти особенности бывают на множествах меры нуль и потому сравнительно легко преодолеваются.

Например, если нам нужно перейти от интеграла по кругу к интегралу по прямоугольнику, мы часто делаем замену переменных

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{10}$$

Это хорошо известные формулы перехода от полярных координат к декартовым на плоскости. При этом отображении прямоугольник $I = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le R \bigwedge 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ преобразуется в круг $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$. Это отображение гладкое, но оно не является диффеоморфизмом: вся сторона прямоугольника I, на которой $r = 0$, переходит при этом отображении в одну точку $(0,0)$; образы точек $(r,0)$ и $(r,2\pi)$ совпадают. Однако если рассмотреть, например, множества $I \setminus \partial I$ и $K \setminus E$, где E — объединение границы ∂K круга K и радиуса, идущего в точку $(0,R)$, то ограничение отображения (10) на область $I \setminus \partial I$ окажется ее диффеоморфизмом на область $K \setminus E$. Значит, если вместо прямоугольника I взять лежащий строго внутри него чуть меньший прямоугольник I_δ, то к нему и его образу K_δ применима формула (6). А тогда, исчерпывая прямоугольник I такими прямоугольниками I_δ и замечая, что при этом их образы K_δ исчерпывают круг K, что $|I_\delta| \to |I|$ и $|K_\delta| \to |K|$, в пределе получаем формулу (6) применительно к самой исходной паре K, I.

Сказанное, естественно, относится и к общей полярной (сферической) системе координат в $\mathbb{R}^n$.

Разовьем сделанное наблюдение.

b) *Исчерпания и предельные переходы.*

Исчерпанием множества $E \subset \mathbb{R}^m$ будем называть такую последовательность измеримых множеств $\{E_n\}$, что $E_n \subset E_{n+1} \subset E$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Лемма. *Если* $\{E_n\}$ *— исчерпание измеримого множества* E, *то*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$ *;*

b) для любой функции $f \in \mathcal{R}(E)$ *также* $f|_{E_n} \in \mathcal{R}(E_n)$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f(x)\,dx = \int\limits_{E} f(x)\,dx.$$

(a) Поскольку $E_n \subset E_{n+1} \subset E$, то $\mu(E_n) \le \mu(E_{n+1}) \le \mu(E)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) \le \mu(E)$. Для доказательства равенства a) покажем, что выполняется также неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) \ge \mu(E)$.

Граница ∂E множества E — компакт меры нуль, поэтому ее можно покрыть конечным числом открытых промежутков, сумма объемов которых меньше наперед заданной величины $\varepsilon > 0$. Пусть Δ — объединение всех этих открытых промежутков. Тогда множество $O = E \cup \Delta$ открыто в $\mathbb{R}^m$, причем по построению O содержит замыкание $\overline{E}$ множества E и $\mu(O) \le \mu(E) + \mu(\Delta) < \mu(E) + \varepsilon$.

Для каждого множества E_n исчерпания $\{E_n\}$ повторим описанное построение со значением $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$. Получим последовательность открытых множеств $O_n = E_n \cup \Delta_n$ таких, что $E_n \subset O_n$, $\mu(O_n) \le \mu(E_n) + \mu(\Delta_n) < \mu(E_n) + \varepsilon_n$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_n \supset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \supset E$.

Система открытых множеств $\Delta, O_1, O_2, \dots$ образует открытое покрытие компакта $\overline{E}$.

Пусть $\Delta, O_1, O_2, \dots, O_k$ — извлеченное из него конечное покрытие компакта $\overline{E}$. Поскольку $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_k$, то множества $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_k$, E_k тоже образуют покрытие $\overline{E}$ и, значит,

$$\mu(E) \le \mu(\overline{E}) \le \mu(E_k) + \mu(\Delta) + \mu(\Delta_1) + \ldots + \mu(\Delta_k) < \mu(E_k) + 2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\mu(E) \le \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

(b) То, что $f|_{E_n} \in \mathcal{R}(E_n)$, нам хорошо известно и следует из критерия Лебега существование интеграла по измеримому множеству. По условию $f \in \mathcal{R}(E)$, значит, существует постоянная M такая, что $|f(x)| \leq M$ на E. Из аддитивности интеграла и общей оценки интеграла получаем

$$\left| \int\limits_E f(x)\,dx - \int\limits_{E_n} f(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_{E \setminus E_n} f(x)\,dx \right| \leq M\mu(E \setminus E_n).$$

Отсюда с учетом доказанного в а) заключаем, что утверждение b) действительно справедливо.

Аддитивность интеграла и возможность исчерпания области интегрирования такими областями, где формула замены переменных заведомо действует, позволяет применять ее и к исходным областям. Вообще, идея исчерпания лежит в основе многих конструкций анализа, в частности, в основе определения несобственного интеграла. Об этом в продолжении.

Мы привели прямое доказательство формулы замены переменной. Свободно владеющие дифференциальным исчислением функций многих переменных могли бы предпочесть иной подход, например, тот, который изложен в учебнике. Там же (в основном тексте и в задачах) стоит взглянуть на формулировки важных математических фактов, которые тесно связаны с разбираемыми вопросами.